11 Produit scalaire dans l'espace

Objectifs :

- Savoir calculer et utiliser le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace
- Connaître la notion de vecteur normal à un plan, détermination, applications
- Connaître et savoir utiliser l'équation cartésienne d'un plan
- Savoir choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique suivant les différents types de problèmes

Aperçu historique :

Voir chapitre 4 .

1. Produit scalaire

A. Dans le plan

On se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Propriété 11.1 (et définition) Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan. En notant $\vec{u}=\vec{AB}$, $\vec{v}=\vec{CD}$ et $\vec{C'D'}$ le projeté orthogonal de $\vec{CD}$ sur la droite (AB), les définitions suivantes du produit scalaire sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= xx'+yy'\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \vec{AB}\cdot\vec{CD}\\
&= \vec{AB}\cdot\vec{C'D'}\\
&= \pm AB\times C'D' \ (+\text{ si } \vec{AB} \text{ et } \vec{C'D'} \text{ sont de même sens et - sinon})
\end{aligned}$$

Pour tout vecteur du plan, $\vec{u}\cdot\vec{0}=0$.

Remarque 11.1 (Conséquence) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=||\vec{u}||^2$.

Propriété 11.2 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Propriété 11.3 La distance d'un point $A(x_A;y_A)$ à une droite $d: ax+by+c=0$ est égale à $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Attention, le repère orthonormal est obligatoire !

B. Dans l'espace

Définition 11.1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)$$

Cette définition est cohérente avec celle du plan et heureusement car deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Remarque 11.2 (Conséquences) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Il existe toujours trois points coplanaires A, B et C tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\begin{array}{rcl}\vec{u}\cdot\vec{v} & = & ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v}) \text{ si ces vecteurs sont non-nuls}\\ \vec{u}\cdot\vec{v} & = & \vec{AB}\cdot\vec{AC}\\ & = & \vec{AB}\cdot\vec{AH}\\ & = & \pm AB\times AH \text{ (+ si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AH} \text{ sont de même sens et - sinon)}\\ \vec{u}\cdot\vec{u} & = & \vec{u}^2=||\vec{u}||^2\end{array}$$

Propriété 11.4 Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ dans un repère orthonormal de l'espace alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

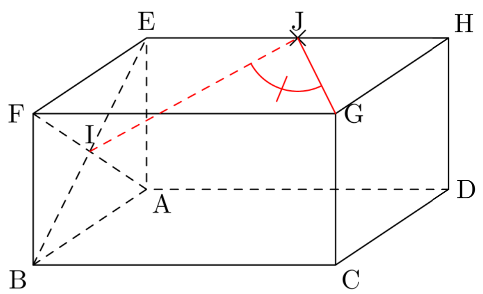
Démonstration il suffit d'écrire $||\vec{u}||^2=x^2+y^2+z^2$, $||\vec{v}||^2=x'^2+y'^2+z'^2$ et $||\vec{u}+\vec{v}||^2=(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2$ et ensuite de remplacer les normes de la définition de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ par ces expressions et enfin de développer et réduire.

Propriété 11.5 (Règles de calculs) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous réels λ et μ on a :

$$\begin{array}{rcl}\vec{u}\cdot\vec{v} & = & \vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) & = & \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\\ (\lambda\vec{u})\cdot(\mu\vec{v}) & = & (\lambda\mu)(\vec{u}\cdot\vec{v})\end{array}$$

Exemple 11.1
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un pavé droit avec $AB=AE=2$ et $AD=4$. I est le milieu de $[AF]$ et J le milieu de $[EH]$.

1. Calculer $\vec{BC}\cdot\vec{IH}$, $\vec{BJ}\cdot\vec{FA}$ et $\vec{JI}\cdot\vec{JG}$.
2. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de $\widehat{IJG}$.



Réponses :

1. $\vec{BC}\cdot\vec{IH}=\vec{BC}\cdot\vec{BC}=16$ (les projetés orthogonaux de I et H sur (BC) sont respectivement B et C).
   $\vec{BJ}\cdot\vec{FA}=\left(\vec{BE}+\vec{EJ}\right)\cdot\vec{FA}=\vec{BE}\cdot\vec{FA}+\vec{EJ}\cdot\vec{FA}=0+0=0.$
   Pour $\vec{JI}\cdot\vec{JG}$ on se place dans le repère orthonormal $\left(A;\frac{1}{2}\vec{AB},\frac{1}{4}\vec{AD},\frac{1}{2}\vec{AE}\right)$. Dans ce repère on a $J(0;2;2)$, $I(1;0;1)$ et $G(2;4;2)$ et donc $\vec{JI}(1;-2;-1)$ et $\vec{JG}(2;2;0)$.
   Finalement, $\vec{JI}\cdot\vec{JG}=2+(-4)+0=-2$.
2. Grâce au même repère qu'à la question précédente, on a :
   $||\vec{IJ}||=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ et $||\vec{JG}||=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}$.
   Donc, $\cos\left(\widehat{IJG}\right)=\frac{-2}{\sqrt{48}}=-\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$; et donc $\widehat{IJG}\approx 106,8\,^\circ$.

2. Orthogonalité dans l'espace

Définition 11.2 Deux droites de l'espace sont orthogonales s'il existe une droite parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

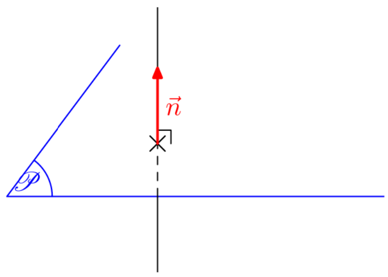
Définition 11.3 Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont des droites orthogonales ou si l'un des deux est nul.

Théorème 11.1 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Soit A un point de l'espace et soient les points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les trois points A, B et C définissent un plan (car un plan est déterminé par trois points non alignés) et dans ce plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

A. Vecteur normal à un plan

Définition 11.4 On appelle vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ tout vecteur $\vec{n}$ non nul dont la direction est orthogonale à $\mathscr{P}$.



Propriété 11.6 (Conséquence directe) Deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires.

Propriété 11.7 ROC : Démonstration à savoir refaire Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan ssi elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et d une droite. Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathscr{P}$.
Si d est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$, alors elle est orthogonale à d_1 et d_2.
Réciproquement, si d est orthogonale à d_1 et d_2, alors on note respectivement $\vec{v}$, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs de d, d_1 et d_2. On a donc : $\vec{v} \cdot \vec{u_1} = \vec{v} \cdot \vec{u_2} = 0$.
Soit δ une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes donc on peut construire un repère du plan $\mathscr{P}$ sur leurs deux vecteurs directeurs et ainsi, il existe x et y tels que $\vec{u} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2}$ (x et y sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$). Finalement, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (x\vec{u_1} + y\vec{u_2}) = x\vec{v} \cdot \vec{u_1} + y\vec{v} \cdot \vec{u_2} = 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et par suite d et δ sont orthogonales.

Remarque 11.3 Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Conséquence : un plan est entièrement déterminé si on se donne au choix :
- trois points non alignés du plan ;
- un point du plan et un vecteur normal au plan ;
- un point du plan et deux vecteurs directeurs non colinéaires.

Remarque 11.4 :
- deux plans de l'espace sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ;
- deux plans de l'espace sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

3. Équations cartésiennes

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer des équations cartésiennes (du type $ax + by + cz + d = 0$) qui caractérisent certains ensembles de l'espace. Elles complètent les systèmes d'équations paramétriques que nous avons vus au chapitre **??**. On choisira l'un ou l'autre type d'équations selon les exercices, en essayant d'obtenir les calculs les plus simples possibles...

A. Équations d'un plan

Théorème 11.2 **ROC : Démonstration à savoir refaire** Dans un repère orthonormal de l'espace :

1) Tout plan $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. De plus $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
2) Réciproquement, soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $d \in \mathbb{R}$ alors l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration 1) Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Par définition, $\vec{n} \neq \vec{0}$ donc $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de $\mathscr{P}$.

D'après la propriété **??**, $\mathscr{P} = \left\{M \in \mathscr{E} / \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\}$. Alors :

$$M \in \mathscr{P} \iff \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \end{cases}$$

En prenant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient l'équation annoncée.

2) Réciproquement, soit $\Pi = \{M(x; y; z) \in \mathscr{E} / ax + by + cz + d = 0\}$.

On peut toujours trouver trois nombres $(x_0; y_0; z_0)$ tels que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Dans ce cas, le point $A(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$. En notant $\vec{n}(a; b; c)$ on a :

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in \Pi &\iff ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à dire que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Théorème 11.3 (admis) Soit $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et $d \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient l'inégalité $ax + by + cz + d < 0$ est un demi espace ouvert (*i.e* : frontière exclue) dont la frontière est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

B. Équation d'une sphère

Théorème 11.4 Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $I(a; b; c)$ et de rayon R. Alors une équation de $\mathscr{S}$ dans un repère orthonormal de l'espace est de la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Exemple 11.2 Déterminer la nature de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+6=0$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{S} &\iff x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+6=0 \\ &\iff x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+6z+9-9+6=0 \\ &\iff (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=8 \end{aligned}$$

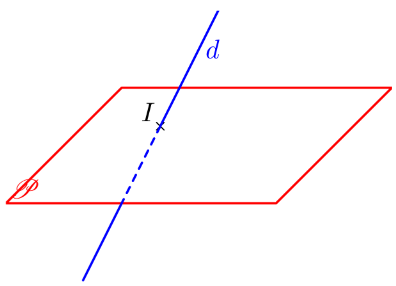
Ainsi $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1;2;-3)$ et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Remarque 11.5 Soient a, b et c trois réels et R un réel strictement positif. Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leq R^2$ est donc la boule fermée de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R.

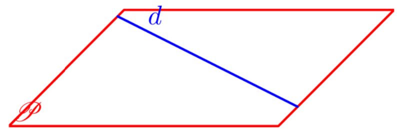
4. Intersections de droites et de plans

A. Intersection d'un plan et d'une droite

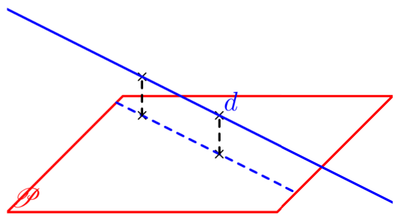
la droite est sécante au plan : $\mathscr{P}\cap d=\{I\}$.



la droite est contenue dans le plan : $\mathscr{P}\cap d=d$.



la droite est strictement parallèle au plan : $\mathscr{P}\cap d=\varnothing$.

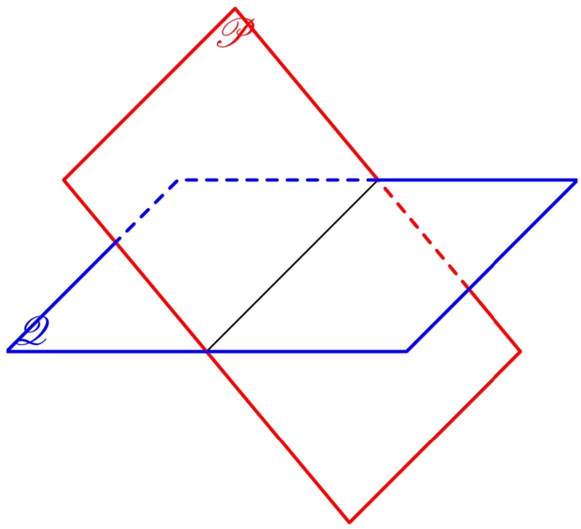


Exemple 11.3 La droite d a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=-4 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

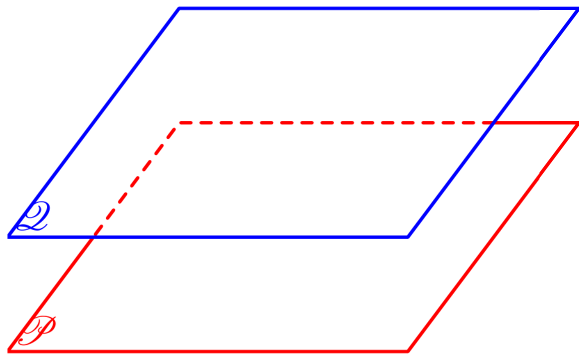
1. Déterminer l'intersection de d avec le plan $(O;\vec{i},\vec{k})$.
2. Démontrer que d est parallèle au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite δ parallèle à d et passant par $I(2;-4;0)$.

Exemple 11.4 Démontrer que (AB) est sécante au plan $\mathscr{P}: x+y+z=1$ où $A(-1;2;3)$ et $B(1;2;-1)$.

B. Intersection de deux plans



Plans sécants : $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = d$.



Plans strictement parallèles : $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = \varnothing$.

Deux plans peuvent aussi être confondus : l'intersection est alors le plan lui-même.

Exemple 11.5 Démontrer que les plans suivants sont sécants, déterminer la représentation paramétrique de leur intersection et enfin donner un point et un vecteur directeur de cette droite d'intersection.

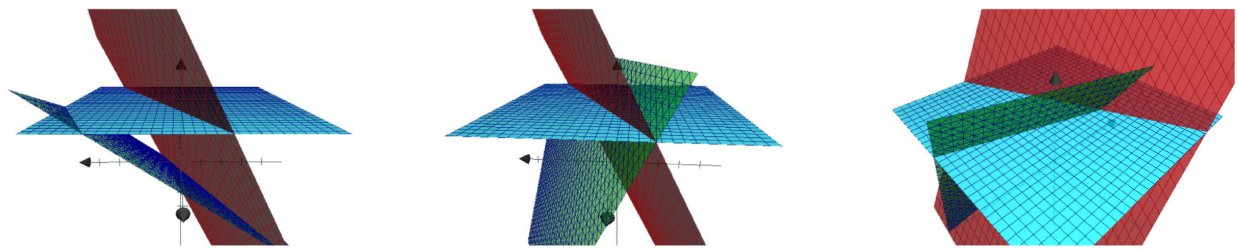
$$\mathscr{P}_1 : -x + y + z = 3 \text{ et } \mathscr{P}_2 : 2x - y + 2z = 1$$

Définition 11.5 (Un cas particulier) Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.

Propriété 11.8 Deux plans sont perpendiculaires ssi leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

C. Intersection de trois plans

L'intersection de trois plans peut être vide, ou être une droite ou encore être réduite à un point.



Exemple 11.6 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois plans ont un point commun, une droite commune ou une intersection vide, puis caractériser cette intersection.

(a) $P_1 : x - 2y - 3z = 3$, $P_2 : 2x - y - 4z = 7$ et $P_3 : 3x - 3y - 5z = 8$.

(b) $P_1 : 2x - y + 3z = 0$, $P_2 : x + 2y + z = 0$ et $P_3 : 3x - 4y + 5z = 0$.

(c) $P_1 : x + y + z = 1$, $P_2 : x - 2y + z = 1$ et $P_3 : 3x - 4y + 3z = -1$.